PART2　面積を2等分

2　放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積が直線 $y=ax$ で2等分されるとき，a の値を求めよ。ただし，$0<a<3$ とする。

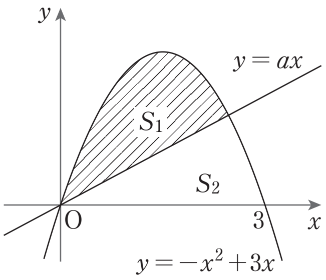
Point Pickup

右図のように放物線と直線で囲まれた部分, 放物線と直線および x 軸で囲まれた部分の面積を，それぞれ S_1，S_2，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると，

$S_1=S_2$，$S=S_1+S_2$ であることから

$$S=2S_1$$

である。



第19講　PART2　確認問題

1　放物線 $y=-x^2+8x$ と x 軸で囲まれた部分を直線 $y=ax$ で分割する。このとき，$y \geqq ax$ の部分と $y \leqq ax$ の部分の面積の比が 1:7 となるような定数 a の値を求めよ。ただし，$0<a<8$ とする。

$a=$ ［ア］

PART2　面積を 2 等分

2　放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積が直線 $y=ax$ で 2 等分されるとき，a の値を求めよ。ただし，$0<a<3$ とする。

放物線 $y=-x^2+3x=-x(x-3)$ と x 軸の共有点の x 座標は

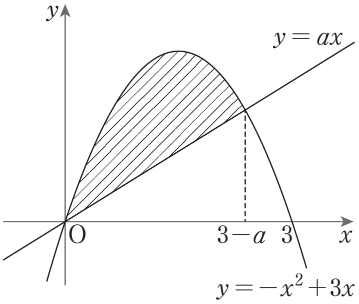
$$x=0,\ 3$$

放物線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+3x=ax$$

より

$$x^2+(a-3)x=0 \qquad x(x+a-3)=0 \qquad x=0,\ 3-a$$



よって，放物線と直線は右図。

放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S，放物線と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると，求める条件は　$S=2S(a)$

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3 x(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

$$S(a)=\int_0^{3-a}(-x^2+3x-ax)dx=-\int_0^{3-a}x(x+a-3)dx=\frac{1}{6}(3-a)^3$$

よって　$\dfrac{9}{2}=2\cdot\dfrac{1}{6}(3-a)^3$　　$(3-a)^3=\dfrac{27}{2}$

a は実数であるから　$3-a=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

したがって　$a=3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$（$0<a<3$ を満たす）

第19講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4

[解説]

放物線 $y=-x^2+8x=-x(x-8)$ と x 軸の共有点の x 座標は　$x=0,\ 8$

放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+8x=ax$$

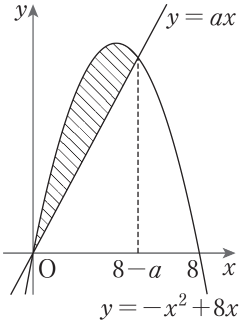
より

$$x^2+(a-8)x=0$$

$$x\{x-(8-a)\}=0$$

ゆえに　$x=0,\ 8-a$

よって，放物線と直線は右図。



放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S，このうちの $y\geqq ax$ の部分，すなわち放物線と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると，求める条件は

$$S=8S(a)$$ [A]

ここで

$$S=\int_0^8(-x^2+8x)dx=-\int_0^8 x(x-8)dx$$

$$=\frac{1}{6}(8-0)^3=\frac{8^3}{6}$$ [B]

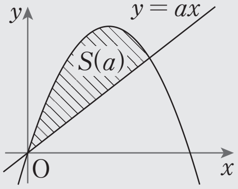
$$S(a)=\int_0^{8-a}(-x^2+8x-ax)dx$$

$$=-\int_0^{8-a}x(x+a-8)dx$$

$$=\frac{1}{6}(8-a)^3$$ [B]

よって

[A]　放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求め，放物線と直線で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a で表し，S と $S(a)$ の比から a の方程式を作って解けばよい。



[B]　積分の公式

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\frac{8^3}{6}=8\cdot\frac{1}{6}(8-a)^3$$

$$8^3=2^3(8-a)^3$$

a は実数より

$$8=2(8-a)$$

したがって

$a=4$　$(0<a<8$ を満たす$)$